Lotka-Volterra

Leçon : 220, 223, 267, (228)
Rq : Berthelin.

Théorème

Soient $a, b, c, d, x_0, y_0 > 0$. On considère le système différentiel

$$(S) \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}, \quad x(0) = x_0, \ y(0) = y_0.$$

Alors la solution maximale de (S) est globale et périodique. (et reste > 0).

Preuve

1) Interprétation : système proie-prédateur

- x : proie
- y : prédateur

→ y mange x.

On interprète les différents termes :

→ ax : reproduct° des proies

→ $-bxy$: proies mangées par les prédateurs

→ $-cy$: disparit° des prédateurs ne rencontrant pas de proie

→ dxy : reproduct° des prédateurs, supposée proportionnelle à x

2) Existence - Unicité : Théorème de Cauchy-Lipschitz

On pose $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, t\right) \mapsto \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}$. $\tilde{f}$ est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

car polynomiale, donc loc. lips. Par CL, ∃! une unique solut°

maximale $\Phi(S)$: $\begin{cases} Y' = f(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ définie sur un intervalle de temps I ouvert contenant 0.

3) Positivité des solutions

Mq $\forall t \in I$, $x(t), y(t) > 0$. C'est cohérent : on considère des populations.

Par l'absurde, s'il existe $t_* \in I$ tq $x(t_*) \leq 0$, alors comme x est $\mathcal{C}^0$ et $x(0) > 0$, par le TVI on aurait l'existence d'un $t^* \in I$ tq $x(t^*) = 0$.

Heuristique : on décale l'origine du temps

$$\left[\text{Si } x = 0, \begin{cases} x' = 0 \\ y = -cy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(t) = y(t^*) e^{-c(t-t^*)} \end{cases} \right.$$

On pose $t \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t^*) e^{-c(t-t^*)} \end{pmatrix}$

Alors cette fct est solution de $\begin{cases} \tilde{x}' = a\tilde{x} - b\tilde{x}\tilde{y} \\ \tilde{y}' = -c\tilde{y} + d\tilde{x}\tilde{y} \end{cases}$

et $(\tilde{x}(t^*), \tilde{y}(t^*)) = (0, y(t^*)) = (x(t^*), y(t^*))$.

Par unicité, $\begin{cases} x = \tilde{x} \\ y = \tilde{y} \end{cases}$. Donc $x(0) = x_0 = \tilde{x}(0) = 0$, contradict.

De même avec y.

Ainsi $\forall t \in I$, $x(t), y(t) > 0$.

4) Globalité des solutions

On va trouver une intégrale première. On pose

$$H(x,y) = dx + by - c\ln x - a\ln y.$$

Heuristique : comment trouver H ? On sépare les variables.

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x'}{x} = a - by \\ \frac{y'}{y} = -c + dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x'}{x}(-c + dx) = \frac{y'}{y}(a - by)$$

$$\Rightarrow -c(\ln x)' + dx' = a(\ln y)' - by'$$

$$\Rightarrow dx + by - c\ln x - a\ln y = \text{cste.}$$

On a $\frac{d}{dt} H(x(t), y(t)) = \dots = 0$.

H est continue (c'est clair). Mq H est coercive

On a ~~H = f+g~~, où $f(x) = dx - c\ln x$, $g(y) = by - a\ln y$.

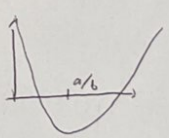
$H(x,y) = f(x) + g(x)$

Par équivalence des normes en dim finie, si $\|(x,y)\| \to +\infty$, alors $|x|$ ou $|y| \to +\infty$, disons $|x|$. On a alors :

$$H(x,y) = f(x) + g(y) \geq f(x) + g(a/b) \to +\infty.$$

car g minimum en a/b

$$g'(y) = b - \frac{a}{y} \geq 0 \iff y \geq a/b$$



Donc (x,y) dans la ligne de niveau d'une f° C^0 coercive, → compact

Donc (x,y) bornée $\Rightarrow I = \mathbb{R}$ par le théorème des bouts.

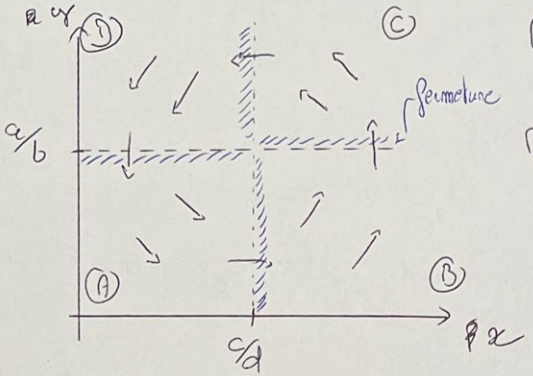
5) Points d'équilibre et périodicité

Les points stationnaires sont les (x^*, y^*) tq

$$\begin{cases} 0 = a x^* - b x^* y^* \\ 0 = -c y^* + d x^* y^* \end{cases} \iff \begin{cases} x^*(a - b y^*) = 0 \\ y^*(-c + d x^*) = 0 \end{cases}$$

$$\iff (x^*, y^*) \in \left\{ (0,0), \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right) \right\}.$$

On découpe le plan en 4 parties :



$$A = \left\{ 0 < x < \frac{c}{d},\ 0 < y \leq \frac{a}{b} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{c}{d} \leq x,\ 0 < y < \frac{a}{b} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{c}{d} < x,\ \frac{a}{b} \leq y \right\}$$

$$D = \left\{ 0 < x \leq \frac{c}{d},\ \frac{a}{b} < y \right\}$$

On suppose que $(x_0, y_0) \in A$. Alors vaut que $(x(t), y(t))$ reste dans A, car a $x' \geq 0$ et $y' \leq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \nearrow \\ y \searrow \end{cases}$$

Supposons que x n'atteigne jamais $\frac{c}{d}$.

Alors x admet une limite dans A, car x l'est majorée par $\frac{c}{d}$.

De même, y converge car $y \searrow$ et y minorée par 0.

Donc $(x(t), y(t)) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (x_\infty, y_\infty)$

Or ces points limite est stationnaire, donc $(x_\infty, y_\infty) = (0,0)$ ou

$(x_\infty, y_\infty) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

Le premier cas est impossible car $x \uparrow$ et $x(0) = x_0 > 0$.

Le deuxième non plus car $y(0) = y_0 < \frac{a}{b}$ (point initial dans A) et $y \downarrow$.

Donc, (x, y) quitte A, x atteint $\frac{c}{d}$ et passe en B.

Il existe $t_1 > 0$ tq $x(t_1) = \frac{c}{d}$ (si $(x_0, y_0) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$, alors x, y cste).

Donc (x, y) est dans B. Si (x, y) reste dans B, alors

$$\begin{cases} x' \geq 0 \Rightarrow x \uparrow \\ y' \geq 0 \Rightarrow y \uparrow \end{cases}$$

Supposons que y n'atteigne jamais $\frac{a}{b}$.

Alors y est bornée par $\frac{a}{b}$. Donc y converge vers $y_\infty \in [0, \frac{a}{b}]$ et x croissante, donc x converge dans $[\frac{c}{d}, +\infty]$.

On ne peut pas avoir $x(t) \to +\infty$, car les trajectoires sont bornées (car dans les lignes de niveau d'une f coercive, etc).

Donc $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} x_\infty$. Donc (x_∞, y_∞) point d'équilibre, absurde par les mêmes raisons. Donc

il existe $t_2 > 0$ $t_1 > 0$ tq $y(t_2) = \frac{a}{b}$.

De même : il existe $t_3 > t_2$ tq $x(t_3) = \frac{c}{d}$

il existe $t_4 > t_3$ tq $y(t_4) = \frac{a}{b}$

Au final, on revient dans A, il existe $t_5 > t_1$ tq $x(t_5) = c/d$.

On a donc $x(t_1) = x(t_5)$.

Mais alors $y(t_1) = y(t_5)$. En effet,

$$H(x,y)(t_1) = H(x,y)(t_5) \Rightarrow f(x(t_1)) + g(y(t_1)) = f(x(t_5)) + g(y(t_5))$$

$$\Rightarrow \boxed{g(y(t_1)) = g(y(t_5))}.$$

Or $y(t_1), y(t_5) \in [0, a/b]$, et $g \downarrow\downarrow$ sur $]0, a/b]$ donc injective. Ainsi $y(t_1) = y(t_5)$.

Ainsi, $t_1 \neq t_5$ et $(x,y)(t_1) = (x,y)(t_5)$.

$\Rightarrow$ ~~system~~ solution périodique.

$\square$

Un point limite est stationnaire.

Soit $f : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$, $\mathcal{C}^0$, y solut° de $y' = f(y)$ sur $\mathbb{R}$ tq $y(t) \to y^*$. Mq $f(y^*) = 0$.

pour aller ovide dire direct que H coercive.

Preuve

f $\mathcal{C}^0$, donc $f(y(t)) \to f(y^*)$, et $y'(t) \to f(y^*) =: \ell$.

On note $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$. On suppose que $\ell \neq 0$.

Alors $\frac{d}{dt} \langle \ell, y(t) \rangle = \langle \ell, y'(t) \rangle \to \|\ell\|^2 > 0$.

$\Rightarrow \exists T$ tq $\forall t \geq T$, $\langle \ell, y(t) \rangle' \geq \|\ell\|^2/2$.

(entre T et t)

En intégrant : $\langle \ell, y(t) \rangle \geq \langle \ell, y(T) \rangle + (t-T)\|\ell\|^2/2$.

à la limite : $\langle \ell, y^* \rangle \geq +\infty$.